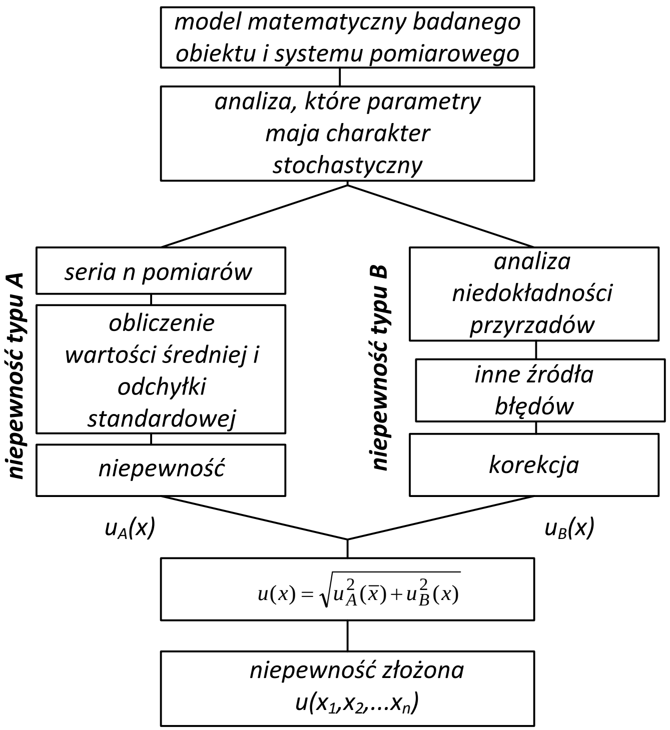
Niepewność pomiaru



Rys. 1. Wyróżniamy dwa rodzaje niepewności – niepewność u_A - uwzględniająca przypadkowy charakter wielkości zmierzonej i niepewność u_B – wynikająca z niedokładności przyrządów pomiarowych

Teoria niiepewności pomiaru zastąpiła teorie błędów (dokument „Guide on Uncertsainty of Measurement" – 1995). Według dawnej teorii błąd bezwzględny Δx opisywany był równaniem:

$$X_p - \Delta X \le X \le X_p + \Delta X$$

co odczytujemy, że wynik pomiaru *X* jest zawarty w przedziale $\pm\Delta X$ wokół wartości prawdziwej X_p

Wg nowej teorii niepewność pomiaru u opisuje równanie

$$\Pr\left(X_o - u \le X \le X_0 + u\right) \ge 1-\alpha$$

co odczytujemy, że wynik pomiaru jest zawarty w przedziale niepewności $\pm u$ wokół wartości estymowanej X_0 z poziomem ufności (1-α) (α - prawdopodobieństwo

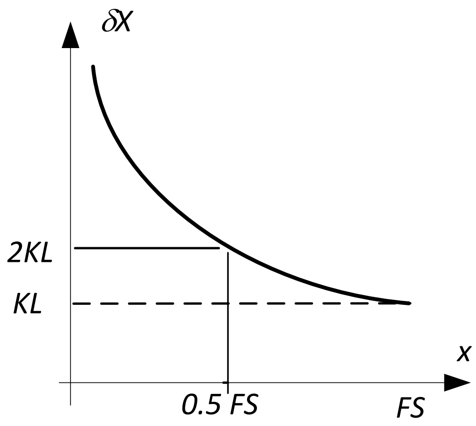
Obok niepewności bezwzględnej u częściej stosowane jest pojęcie niepewności względnej

$$\delta X = \frac{u}{X_o}$$

gdzie X_o jest wartością odniesienia (najczęściej wartością zmierzoną, ale też niekiedy zakresem przyrządu.

Jak określamy niepewność pomiaru przyrządem analogowym (niepewność typu B)

- Rys. 2. Jeśli wskazówka jest w połowie zakresu to niepewność pomiaru wzrasta dwukrotnie (jeśli jest w 1/10 zakresu to dziesięciokrotnie)



Nie powinno się więc używać miernika wskazówkowego w obszarze poniżej połowy zakresu bo znacznie wtedsy wzrasta niepewność pomiaru

•Niedokładność przyrządu analogowego opisuje pojęcie klasy KL dokładności zdefiniowanej jako:

$$KL = \frac{\Delta x_{\max}}{FS}$$

•gdzie Δx_{max} – błąd bezwzględny skalowania wszystkich punktów ocyfrowanych, FS – zakres przyrządu (Full Scale). Niepewność pomiaru opisana jest więc wzorem

$$\delta X = \frac{\Delta X}{X_o} = \frac{FS \cdot KL}{X_o}$$

•Obliczmy niedokładność gdy wskazówka jest na końcu skali, czyli X_o = FS:

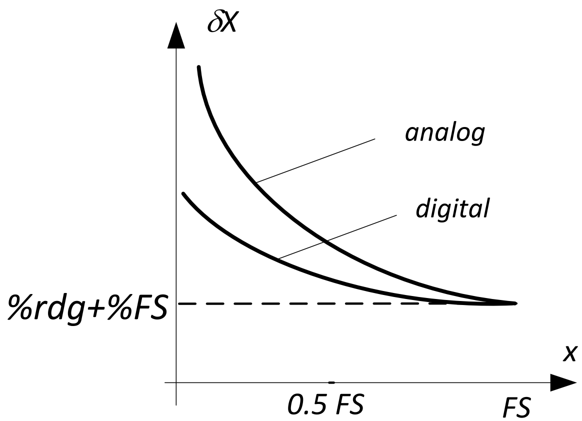
$$\delta X = \frac{FS \cdot KL}{X_o} = \frac{FS \cdot KL}{FS} = KL$$

•a więc klasa opisuje niepewność pomiaru wtedy gdzy wskazówka jest na końcu zakresu. Jeśli wskazówka jest w połowie skali X_o = 0.5 FS to niepewność jest

$$\delta X = \frac{FS \cdot KL}{X_o} = \frac{FS \cdot KL}{0.5 \cdot FS} = 2KL$$

Jak określamy niepewność pomiaru przyrządem cyrowym (niepewność typu B)

•Rys.3. Wartość podana przez producenta czyli %rdg+%FS opisuje niepewcośc dla wskazania równego zakresowi. Pomiar mniejszej wartości oznacza wzrost błędu pomiaru ale nie tak ostry jak w przypadku przyrządów analogowych – w naszym przykładzie dla połowy zakresu niepewność wzrosła z 0.7 do 0.9.



W przypadku przyrządów cyfrowych nie powinno się mierzyć wartości mniejszej niż 0. zakresu, czyli że pierwsza cyfra jest ówna 0.

•Niedokładność przyrządu cyfrowego opisujemy zależnością

$$u = \%rdg + \%FS$$

•gdzie rdg – wartość odczytania (reading), FS – zakres (Full scale). Niepewność pomiaru opisuje więc wzór:

$$\delta x = \frac{\%rdg + \%FS}{rdg}$$

Załóżmy że niepewność przyrządu opisana jest jako

•05+0.2. Obliczmy niepewność pomiaru dla wyniku równego zakresowi a więc rdg = FS.

$$\delta x = \frac{\%rdg + \%FS}{rdg} = \frac{0.5FS + 0.2FS}{FS} = 0.5 + 0,2 = 0.7\%$$

•a więc to co podaje producent dotyczy sytuacji gdy przyrząd wskazuje wartość równą zakresowi. Dla połowy zakresu tj rdg=0.f mamy

$$\delta x = \frac{\%rdg + \%FS}{rdg} = \frac{0.5 \cdot 0.5FS + 0.2FS}{0.5FS} = 0.9\%$$

A co jeśli nie dysponujemy danymi producenta?

- Niepewność przyrządu cyfrowego można określać na podstawie liczby cyfr zgodnie z poniższą tabelą:

Tabela 2.1. Rozdzielczości typowych przyrządów cyfrowych

Liczba cyfr	Liczba stanów	Rozdzielczość
miernik 3-cyfrowy	1000	0,1%
miernik 4-cyfrowy	10 000	0,01%
miernik 4½-cyfrowy	20 000	0,005%
miernik 4¾-cyfrowy	50 000	0,002%

W mierniku 4½-cyfrowym pierwsza cyfra może przyjmować wartości 0 lub 1 a pozostałe 0,1,...,9; w mierniku 4¾-cyfrowym pierwsza cyfra może przyjmować wartości 0,1,2,3,4.

Mniejsza niż 9+0 liczba cyfr (pierwszej cyfry wskaźnika) nie wynika z oszczędnoości ale ogólenj zasady
ostatnia cyfra znacząca w wyniku pomiaru powinna być tego samego rzędu (stać na tym samym miejscu dziesiętnym) co błąd.

Niepewność pomiaru dla trzech typowych przyrządów pomiarowych

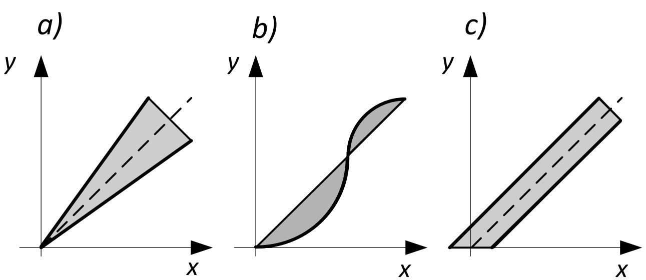
- Tabela 5.4 przedstawia niepewności pomiarów dla trzech przyrządów cyfrowych: przenośnego, laboratoryjnego i wzorcowego

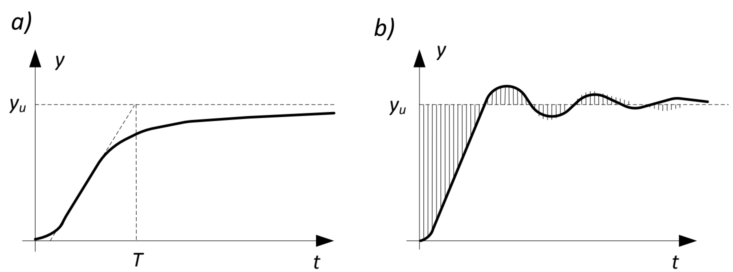
Tabela 5.4. Parametry typowych cyfrowych przyrządów pomiarowych

typ model producent	przenośny miernik uniwersalny 110 Fluke	multimetr laboratoryjny 34401A Agilent	multimetr dużej dokładności 2002 Keithley
liczba cyfr	3¾ (6000)	6½ cyfry	7½ lub 8½
pomiar:	U,I (DC i AC),R, C,f	U, I (DC i AC), R, f	U,I (AC i DC), R,f,T
niepewność pomiaru napięcia DC	0,7%	0,0035+0,0005%	0,0006+0,00008%
rezystancja przy pomiarze 200 mV DC	10 MΩ	>10 GΩ	>10 GΩ
niepewność pomiaru napięcia AC	1%	0,06+0,03%	0,02+0,01%
pasmo częstotliwości	50 – 500 Hz	10 Hz – 300 kHz	1 Hz – 2 MHz
max liczba odczytów	40/sek	1000/sek DC 50/sek AC	2000/sek 4½ cyfry 44/sek 7½ cyfry
pamięć	-	512 odczytów	30°000 odczytów
wyjście	-	RS232C i HPiB	GPIB

Błędy przetwarzania (niepewność typu B)

- Rys.5. Typowe błędy przetwarzania: a) błąd stałej, b) błąd nieliniowości, c) błąd zera





Rys. 6. Błąd dynamiki przetwarzania – odpowiedź na skok jednostkowy wejścia: a) przetwornik inercyjny, b) przetwornik oscylacyjny

•Jeśli urządzeniem pomiarowym nie jest miernik ale przetwornik to na niepewność przetwarzania składają się następujące błędy:

•A. przetwornik bez błędu (teoretyczny)

$$WY = K \cdot We$$

•B. Błąd stałej K (niedokładność)

$$WY = \left(K + \Delta K\right) \cdot We$$

•Błąd ten może wynikać z wpływu temperatury, starzenia się elementów i możemy go zmniejszać przez okresową kalibrację przetwornika.

•C. Błąd nieliniowości opisuje zależność

$$WY = K\left(x\right)We$$

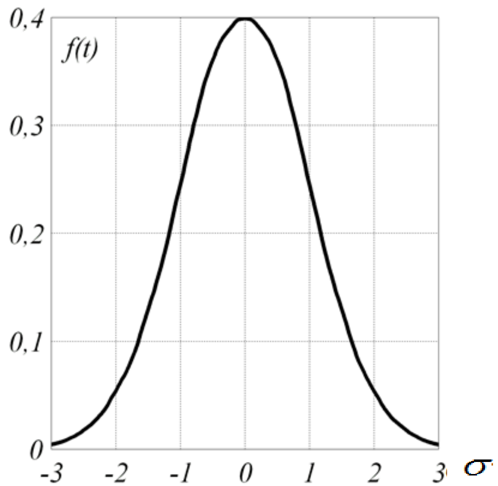
•Lub częściej wielomian:

$$WY = K_1 WE + K_2 WE^2 + K_3 WE^3 + \ldots$$

•D. Błąd zera – pełzanie zera lub przykrycie zera przez szumy (tzw strefa martwa)

Niepewność typu A

•Rys.6. Gęstość prawdopodobieństwa opisana krzywą Gaussa (rozkład normalny)



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

gdzie: σ jest odchyleniem standardowym rozkładu normalnego, a μ jest wartością oczekiwaną.

•W przypadku gdy wyniki pomiarów nie są powtarzalne y to uwzględnić obliczając niepewność typu A.

•Po pierwsze należy wykonać *n* pomiarów. Ile pomiarów wystarczy? Teoretycznie krzywa Gaussa jest ważna dla ponad 30 pomiarów, ale w praktyce całkiem wystarcza 10 pomiarów. Nie znaczy to że musimy fizycznie powtarzać p*om*iary, może to za nas zrobić system pomiarowy.

Jeśli nie zachodzą specjalne okoliczności to możemy zakładać że że obowiązuje krzywa rozkładu normalnego (Gaussa) i wtedy niepewność typu B jest równa odchyłce standardowej:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

a wartość średnia jest estymatą pomiaru

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Tak obliczona niepewność znana jest z prawdopodobieństwem 68%. Prawdopodobieństwo to można zwiększyć przyjmując niepewność równą 2σ (prawdopodobieństwo 95%) lub 3 σ (prawdopodobieństwo równe 99.7)

Niepewność złożona bezwzględna

•Jeśli nasz a wartość y jest funkcją wielu zmiennych x_i (i każdą z tych zmiennych zmierzyliśmy z niepewności u) to niepewność naszej wartości y możemy określić korzystając z wzoru

$$y = f(x_1, x_2 .. x_n)$$

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i, x_j)$$

gdzie *$u(x_i, x_j)$* jest kowariancją zmiennych zależnych.

W praktyce inżynierskiej pomijamy korelację między zmiennymi i niepewność złożoną obliczmy korzystając ze znacznie prostszego wzoru:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial X_i}\right]^2 u^2(x_i)}$$

•Obliczmy niepewność pomiaru mocy P jeśli zmierzono prąd, napięcie i cosφ z niepewnościami U:

$$P = UI\cos\varphi$$

$$u^2(P) = (I\cos\varphi)^2 u^2(U) + (U\cos\varphi)^2 u^2(I) + (UI)^2 u^2(\cos\varphi)$$

Otrzymane wyrażenie nie jest ani czytelne ani wygodne w użyciu. Bardziej czytelny opis niepewności możemy otrzymać operując niepewnością względną modyfikując wyrżenie na niepewność do postaci:

$$\delta^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\left(\frac{x_i}{y}\right)^2\delta^2(x_i)$$

Niepewność złożona względna

•Korzystając z wzoru

$$\delta^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \left(\frac{x_i}{y}\right)^2 \delta^2(x_i)$$

Obliczmy niepewność pomiaru mocy (niepewność iloczynu zmiennych)

$$\delta^2(P) = (U\cos\varphi)^2 \left(\frac{I}{UI\cos\varphi}\right)^2 \delta^2(I) +$$
$$(I\cos\varphi)^2 \left(\frac{U}{UI\cos\varphi}\right)^2 \delta^2(U) +$$
$$(UI)^2 \left(\frac{\cos\varphi}{UI\cos\varphi}\right)^2 \delta^2(\cos\varphi)^2$$

A więc:

$$\delta(P) = \sqrt{\delta^2(U) + \delta^2(I) + \delta^2(\cos\varphi)}$$

Obliczmy niepewność sumy zmiennych a więc na przykład wynik pomiaru mocy w układzie Arona

$$P = P_1 + P_2$$

A więc

$$\delta^2(P) = \sqrt{\left(\frac{P_1}{P_1 + P_2}\right)^2 \delta^2(P_1) + \left(\frac{P_2}{P_1 + P_2}\right)^2 \delta^2(P_2)}$$